

CAPITULO 3

CALCULO DE FLUJOS DE POTENCIA

3.1. Introducción

El cálculo y análisis del flujo de potencias en la red de un Sistema Eléctrico de Potencia (SEP) es uno de los aspectos más importantes de su comportamiento en régimen permanente. Consiste en determinar los flujos de potencia activa y reactiva en cada línea del sistema y las tensiones en cada una de las barras, para ciertas condiciones preestablecidas de operación.

Hasta el año 1950, el Cálculo del Flujo de Potencias (CFP) se realizaba utilizando principalmente los Analizadores de Redes de Corriente Alterna (ARCA) y en algunos casos, los Analizadores de Redes de Corriente Continua (ARCC) que corresponden a una simulación a escala del Sistema Real. En la actualidad, el CFP se realiza fundamentalmente, utilizando los computadores digitales por las grandes ventajas que éstos presentan respecto a los analizadores de redes.

El análisis del flujo de potencias (AFP) permite:

- Programar las ampliaciones necesarias del SEP y determinar su mejor modo de operación, teniendo en cuenta posibles nuevos consumos, nuevas líneas o nuevas centrales generadoras.
- Estudiar los efectos sobre la distribución de potencias, cuando se producen pérdidas temporales de generación o circuitos de transmisión.
- Ayudar a determinar los programas de despacho de carga para obtener un funcionamiento óptimo.

3.2. Planteamiento del problema básico

Considérese el SEP elemental de dos barras de la Figura 3.1 y su circuito equivalente por fase que se muestra en la Figura 3.2. La línea L_{12} se ha representado por su circuito π nominal y donde:

$\dot{S}_1$ y $\dot{S}_2$: Potencias complejas netas de las barra 1 y 2 respectivamente, representadas como fuentes de potencia activa y reactiva, que corresponden a la **Potencia Generada menos la Potencia Consumida**.

$\dot{S}_{12}$ y $\dot{S}_{21}$: Flujos de potencia compleja que van desde la barra 1 a la barra 2 y viceversa.

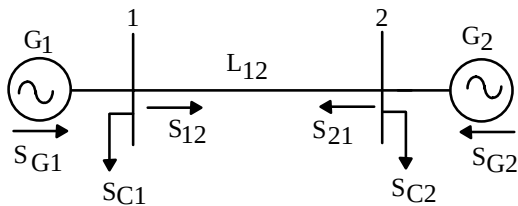


Figura 3.1.- Sistema elemental de dos barras para plantear el problema básico

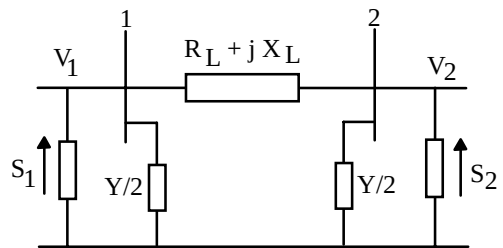


Figura 3.2.- Circuito equivalente por fase del sistema de la Figura 3.1

En la Figura 3.1, las potencias complejas netas de las barras 1 y 2 son:

$$\begin{aligned}\dot{S}_1 &= \dot{S}_{G1} - \dot{S}_{C1} = (P_{G1} - P_{C1}) + j(Q_{G1} - Q_{C1}) = P_1 + jQ_1 \\ \dot{S}_2 &= \dot{S}_{G2} - \dot{S}_{C2} = (P_{G2} - P_{C2}) + j(Q_{G2} - Q_{C2}) = P_2 + jQ_2\end{aligned}\tag{3.1}$$

En el circuito de la Figura 3.2 se puede escribir:

$$\begin{aligned}\frac{S_1^*}{V_1^*} &= \frac{P_1 - jQ_1}{V_1^*} = \dot{V}_1 \frac{Y}{2} + \frac{\dot{V}_1 - \dot{V}_2}{R_L + jX_L} \\ \frac{S_2^*}{V_2^*} &= \frac{P_2 - jQ_2}{V_2^*} = \dot{V}_2 \frac{Y}{2} + \frac{\dot{V}_2 - \dot{V}_1}{R_L + jX_L}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Estas ecuaciones, que relacionan las tensiones con las potencias activas y reactivas, presentan las siguientes características.

- Son algebraicas y no lineales.
- La frecuencia no aparece en forma explícita porque se la supone constante.
- El sistema de cuatro ecuaciones, tiene 12 variables en total: P_{G1} , P_{G2} , Q_{G1} , Q_{G2} , P_{C1} , P_{C2} , Q_{C1} , Q_{C2} , V_1 , θ_1 , V_2 , θ_2 , por lo que no es posible obtener una solución para ninguna de ellas a menos que se reduzca el número de incógnitas, fijando de antemano algunas variables.

En relación a esto último, una forma posible de resolver el problema es la siguiente:

- A partir de los datos del consumo suponer conocidas e independientes del voltaje, las potencias de las cargas P_{Ci} , Q_{Ci} , con $i = 1, 2$.
- Fijar a priori dos variables de generación P_{G2} y Q_{G2} por ejemplo. No se pueden fijar las cuatro variables de generación debido a que las pérdidas en el sistema no son conocidas inicialmente.
- Fijar el módulo y ángulo de la tensión en barra 1; es decir; suponer conocidos V_1 , θ_1 . En particular, puede tomarse esta tensión como referencia, o sea, $\theta_1=0$

En estas condiciones, el sistema de 4 ecuaciones (3.2) queda con sólo 4 variables: P_{G1} , Q_{G1} , V_2 , θ_2 .

3.3. Modelo de representación del SEP

Teniendo presente el análisis del problema básico y con el objeto de establecer un procedimiento general para el CFP, es necesario considerar lo siguiente:

3.3.1. Tipos de Barras

Asociados a cada barra p de un SEP existen cuatro variables, P_p ; Q_p ; V_p ; θ_p . Según las variables conocidas y desconocidas, las barras se clasifican en los siguientes grupos:

- **Barras de Carga (Barras P-Q):** P_p y Q_p están especificadas; V_p y θ_p son las incógnitas
- **Barras de tensión controlada (Barra P-V):** P_p y V_p están especificadas; Q_p y θ_p son las incógnitas. En este tipo de barra debe existir alguna fuente controlable de potencia reactiva.
- **Barra flotante (Barra $\dot{V}$):** V_p y θ_p están especificados; P_p y Q_p constituyen las incógnitas. En esta barra debe existir por lo menos un generador. La necesidad de definir esta barra nace del hecho que no es posible especificar a priori, la potencia total que es necesario generar en el sistema debido a que inicialmente no se conocen las pérdidas en el mismo. La barra flotante debe suministrar la diferencia entre la potencia compleja inyectada al sistema en el resto de las barras y la carga total más las pérdidas. Esta barra se conoce también con otros nombres tales como: de referencia, oscilante, de relajación (slack).

3.3.2. Representación de los elementos del SEP

a. Líneas: Se representan usualmente por su circuito π nominal. Para una línea conectada entre las barras p y q de un SEP, el circuito equivalente corresponde al mostrado en la Figura 3.3. En algunos casos, basta representar la línea por su impedancia serie.

b. Transformadores: Cuando funcionan en su razón nominal, se representan por su impedancia de cortocircuito. Cuando operan con cambio de TAP y razón no nominal, se pueden representar por su circuito equivalente π que se muestra en la Figura 3.4, cuyos parámetros se indican en la ecuación (3.3).

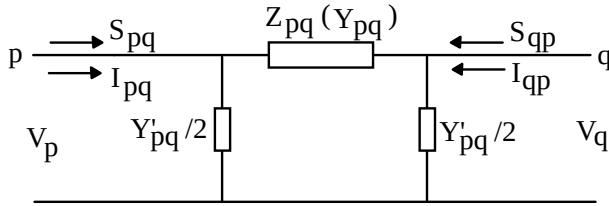


Figura 3.3.- Circuito equivalente π de una línea para el cálculo de flujos de potencia

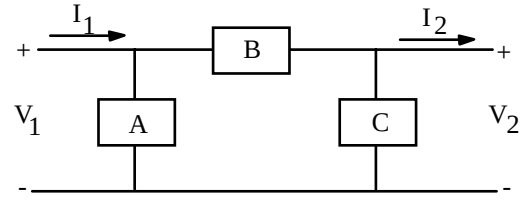


Figura 3.4.- Modelación circuital en tanto por unidad de un transformador con cambio de TAP

$$A = \frac{Y}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \right) \quad B = \frac{Y}{\alpha\beta} \quad C = \frac{Y}{\beta} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (3.3)$$

Con $\alpha=1+t_1$ y $\beta=1+t_2$; y donde t_1 y t_2 , representan el cambio del Tap, en el lado respectivo.

c. Generadores: Se consideran normalmente como fuentes de potencia activa y reactiva.

3.4. Planteamiento matemático del problema para un SEP de “n” barras

3.4.1. Ecuaciones de Barras

Considérese una barra p cualquiera de un sistema tal como se muestra en la Figura 3.5. La potencia compleja neta, $\dot{S}_p$ y la corriente inyectada en la barra p, $\dot{I}_p$ están relacionadas por las siguientes ecuaciones, que constituyen las ecuaciones de barras.

$$\begin{aligned} \dot{S}_p &= V_p I_p^* = P_p + jQ_p \\ \dot{I}_p &= \frac{S_p^*}{V_p^*} = \frac{P_p - jQ_p}{V_p^*} \end{aligned} \quad (3.4)$$

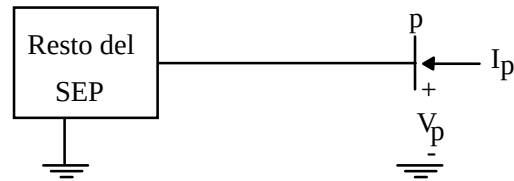


Figura 3.5.- Representación de una Barra p en un SEP

3.4.2. Ecuaciones del flujo de potencias

A partir de la Figura 3.3 se puede escribir:

$$\dot{I}_{pq} = (\dot{V}_p - \dot{V}_q) \dot{Y}_{pq} + \dot{V}_p (\dot{Y}'_{pq}/2) \quad (3.5)$$

La potencia compleja que fluye desde la barra p a la q está dada por:

$$\dot{S}_{pq} = \dot{V}_p \dot{I}_{pq}^* = \left[\dot{Y}_{pq}^* + (\dot{Y}'_{pq}/2)^* \right] V_p^2 - \dot{V}_p V_q^* \dot{Y}_{pq}^* \quad (3.6)$$

Análogamente, la potencia compleja que fluye desde la barra q a la barra p estará dada por:

$$\dot{S}_{qp} = \dot{V}_q I_{qp}^* = \left[Y_{qp}^* + (Y_{qp}'/2)^* \right] V_q^2 - V_p^* \dot{V}_q Y_{qp}^* \quad (3.7)$$

Las expresiones (3.6) y (3.7) corresponden a las ecuaciones del flujo de potencia a través de la línea. Conviene indicar que $\dot{Y}_{pq} = \dot{Y}_{qp}$ y $(\dot{Y}_{pq}'/2) = (\dot{Y}_{qp}'/2)$. Además, $\dot{Y}_{pq}$ es el inverso de la impedancia entre las barras p y q, el que no debe confundirse con el valor correspondiente en la matriz Y_B , de la ecuación (3.10).

3.4.3. Potencia perdida en la transmisión

De acuerdo con los sentidos adoptados para $\dot{S}_{pq}$ y $\dot{S}_{qp}$, la potencia compleja perdida en la línea será:

$$\dot{S}_{Lpq} = \dot{S}_{pq} + \dot{S}_{qp} \quad (3.8)$$

3.4.4. Cálculo de las tensiones de barras

Las ecuaciones (3.6) y (3.7) indican claramente que para resolver el problema del flujo de potencias se requiere determinar previamente las tensiones en todas las barras que correspondan. Empleando el método nodal de resolución de circuitos, en forma matricial, para la red de un SEP de n barras se puede escribir:

$$[I_B] = [Y_B][V_B] \quad (3.9)$$

donde $[I_B]$ es el vector de corrientes inyectadas a las barras; $[Y_B]$ es la matriz admitancia de barras y $[V_B]$ es el vector tensiones de barra, definidos como:

$$[I_B] = \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \vdots \\ \dot{I}_p \\ \vdots \\ \dot{I}_n \end{bmatrix} \quad [V_B] = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \vdots \\ \dot{V}_p \\ \vdots \\ \dot{V}_n \end{bmatrix} \quad [Y_B] = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} & \cdots & \dot{Y}_{1p} & \cdots & \dot{Y}_{1n} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} & \cdots & \dot{Y}_{2p} & \cdots & \dot{Y}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Y}_{p1} & \dot{Y}_{p2} & \cdots & \dot{Y}_{pp} & \cdots & \dot{Y}_{pn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dot{Y}_{n1} & \dot{Y}_{n2} & \cdots & \dot{Y}_{np} & \cdots & \dot{Y}_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Teniendo presente que según (3.4), las corrientes inyectadas en las barras dependen de las potencias complejas netas respectivas y considerando (3.9) y (3.10), se puede escribir:

$$\begin{aligned} \frac{S_1^*}{V_1^*} &= \dot{Y}_{11} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{12} \dot{V}_2 + \cdots + \dot{Y}_{1p} \dot{V}_p + \cdots + \dot{Y}_{1n} \dot{V}_n \\ \frac{S_2^*}{V_2^*} &= \dot{Y}_{21} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{22} \dot{V}_2 + \cdots + \dot{Y}_{2p} \dot{V}_p + \cdots + \dot{Y}_{2n} \dot{V}_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{S_p^*}{V_p^*} &= \dot{Y}_{p1} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{p2} \dot{V}_2 + \cdots + \dot{Y}_{pp} \dot{V}_p + \cdots + \dot{Y}_{pn} \dot{V}_n \\ &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \frac{S_n^*}{V_n^*} &= \dot{Y}_{n1} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{n2} \dot{V}_2 + \cdots + \dot{Y}_{np} \dot{V}_p + \cdots + \dot{Y}_{nn} \dot{V}_n \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este sistema de ecuaciones es similar al obtenido en el problema elemental de 2 barras; es decir; las ecuaciones son algebraicas y no lineales, por lo tanto es necesario resolverlo mediante técnicas de aproximaciones sucesivas.

3.5. Técnicas de solución para el problema del flujo de potencias

Existen actualmente diversos métodos para resolver el problema de cálculo del flujo de potencias, los que reciben nombres según sea el procedimiento que se aplique para calcular las tensiones. Entre ellos podemos mencionar el de Gauss, el de Gauss-Seidel, los de Newton-Raphson (Completo, Desacoplado, Desacoplado rápido), el flujo DC, etc.

Se estudiará a continuación, cada uno de ellos, considerando en primer lugar el procedimiento general y luego las aplicaciones al cálculo de flujo de potencias

3.5.1. Método de Gauss

Se emplea para resolver un problema lineal o no lineal. Por simplicidad se considerará un sistema lineal de ecuaciones, como el indicado en (3.12), para fundamentarlo. Sin embargo, su aplicación a un sistema no lineal resulta inmediata.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= y_3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Despejando x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera se obtiene:

$$\begin{aligned} x_1 &= (y_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \\ x_2 &= (y_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)/a_{22} \\ x_3 &= (y_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)/a_{33} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sean x_1^0, x_2^0, x_3^0 , valores iniciales estimados a priori de la solución del sistema (3.12), entonces, reemplazando estos valores en (3.13) se tiene:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= (y_1 - a_{12}x_2^0 - a_{13}x_3^0)/a_{11} \\ x_2^1 &= (y_2 - a_{21}x_1^0 - a_{23}x_3^0)/a_{22} \\ x_3^1 &= (y_3 - a_{31}x_1^0 - a_{32}x_2^0)/a_{33} \end{aligned} \quad (3.14)$$

El procedimiento continua hasta que se satisface algún “criterio de convergencia” tal como, por ejemplo, el indicado en (3.15), donde ε es una cantidad de valor pequeño y positivo. A cada etapa del proceso se le denomina “iteración”.

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (3.15)$$

Aplicando el método a un sistema de n ecuaciones con n incógnitas; para la incógnita x_i , después de k iteraciones, y con $i = 1, 2, \dots, n$; se puede escribir:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[y_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j^k \right] \quad (3.16)$$

Los inconvenientes de este procedimiento son el gran número de pasos que se requiere para llegar al resultado y la ocurrencia relativamente alta de situaciones en que no hay convergencia, por lo que no se utiliza para resolver el problema de cálculo de los voltajes de la ecuación (3.11). Sin embargo, constituye la base para la formulación del Método de Gauss-Seidel, lo que justifica su análisis. Al aplicar la ecuación (3.16) al problema de cálculo de los voltajes en las barras del sistema de ecuaciones (3.11) se obtiene:

$$\dot{V}_p^{k+1} = \frac{1}{\dot{Y}_{pp}} \left[\frac{P_p - jQ_p}{(V_p^k)^*} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n \dot{Y}_{pq} \dot{V}_q^k \right] \quad (3.17)$$

Donde: $p = 1, 2, 3, \dots, n$; $q = 1, 2, 3, \dots, n$ y $p \neq s$ (barra slack).

La ecuación (3.17) se conoce como método de Gauss Y_B , porque usa el Método de Gauss y se trabaja con la matriz admitancia de barras del sistema eléctrico. La expresión es válida sólo para las barras de carga. En el caso en que el SEP contenga barras de tensión controlada, la ecuación (3.17) debe ser modificada, pues en este tipo de barras no se conoce el valor de la potencia reactiva Q_p . Por lo dicho en el párrafo anterior, la modificaciones requeridas se estudiarán al considerar el Método de Gauss-Seidel Y_B .

3.5.2 Método de Gauss-Seidel

a. Caso general: Corresponde a una modificación del método de Gauss tendiente a acelerar la convergencia del proceso iterativo. En el método de Gauss se calculan todos los valores de las incógnitas correspondientes a una iteración y luego se emplean para determinar los nuevos valores de las incógnitas en la iteración siguiente. En el método de Gauss-Seidel en cambio, los valores calculados en una iteración determinada, se utilizan inmediatamente para calcular los valores de las incógnitas que restan por calcular en la misma iteración.

De este modo, si el proceso de cálculo se encuentra en la iteración $(k+1)$ y ya se han determinado $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$; entonces, los valores que se utilizan para calcular x_i^{k+1} serán $x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_{i+1}^k, x_{i+2}^k, \dots, x_n^k$

Por tanto, la fórmula iterativa del Método de Gauss-Seidel aplicada a un sistema de n ecuaciones de la forma dada por (3.12) es:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left[y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k \right] \quad (3.18)$$

b. Aplicación del método de Gauss-Seidel Y_B al cálculo flujos de potencia: El cálculo de las tensiones de barras aplicando el procedimiento explicado anteriormente es distinto según sean los tipos de barras existentes en el SEP. Por ello se considerarán en primer lugar los sistemas con barras de carga y flotante solamente, por ser el caso más simple. A continuación se analizará la situación de las barras de tensión controlada.

b1. Sistemas con barras de carga y flotante solamente: Aplicando la ecuación (3.18) al sistema (3.11) se tiene:

$$\dot{V}_p^{k+1} = \frac{1}{\dot{Y}_{pp}} \left[\frac{P_p - jQ_p}{(V_p^k)^*} - \sum_{q=1}^{p-1} \dot{Y}_{pq} \dot{V}_q^{k+1} - \sum_{q=p+1}^n \dot{Y}_{pq} \dot{V}_q^k \right] \quad (3.19)$$

Donde: $p = 1, 2, 3, \dots, n$; $q = 1, 2, 3, \dots, n$ y $p \neq s$ (barra slack).

La secuencia de solución según este método es como sigue:

1. Se suponen valores iniciales de tensión para todas las barras a excepción de la flotante, cuya tensión está especificada, o sea es dato del problema, al igual que P_p y Q_p en todas las barras de carga y los términos de la matriz admitancia de barras $[Y_B]$.
2. Se aplica la fórmula iterativa (3.19) hasta que se cumpla algún criterio de convergencia, por ejemplo:

$$\begin{aligned} |V_p^{k+1} - V_p^k| &\leq \varepsilon_1 \text{ especificado} && \text{con } p = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y } p \neq s \text{ (barra slack)} \\ |\theta_p^{k+1} - \theta_p^k| &\leq \varepsilon_2 \text{ especificado} && \text{con } p = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{y } p \neq s \text{ (barra slack)} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3. Determinadas las tensiones $\dot{V}_p$, se calculan los flujos de potencia $\dot{S}_{pq}$ y $\dot{S}_{qp}$ aplicando (3.6) y (3.7).
4. Conocidos los valores de $\dot{S}_{pq}$ y $\dot{S}_{qp}$ se determinan las pérdidas en el sistema, empleando (3.8).

b2. Sistemas con barras de carga, tensión controlada y flotante: Normalmente un SEP incluye además de las barras de carga y flotante, barras de tensión controlada (BTC) que tienen por objeto permitir regular la tensión en uno o varios puntos del sistema. En las barras de tensión controlada debe existir una fuente regulable de potencia reactiva para poder cumplir su cometido.

Debido a que en este tipo de barra sólo se conocen el módulo de la tensión y la potencia activa, es necesario calcular previamente la potencia reactiva, antes de emplear la ecuación (3.19) para determinar el voltaje complejo en ella.

A partir de la ecuación para la barra p de la expresión (3.11), se puede escribir:

$$S_p^* = P_p - jQ_p = V_p^* (\dot{Y}_{p1} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{p2} \dot{V}_2 + \dots + \dot{Y}_{pp} \dot{V}_p + \dots + \dot{Y}_{pn} \dot{V}_n) = V_p^* \sum_{q=1}^n \dot{Y}_{pq} \dot{V}_q \quad (3.21)$$

es decir:

$$Q_p = -\text{Im ag} \left\{ V_p^* \sum_{q=1}^n \dot{Y}_{pq} \dot{V}_q \right\} \quad (3.22)$$

Cuando se emplea la ecuación (3.19) en una BTC, el valor de Q_p , que debe utilizarse corresponde al indicado por (3.22), el que se debe actualizar en cada iteración. Al determinar el voltaje, debe tenerse en cuenta que su módulo en esta barra está especificado y por lo tanto sólo puede cambiar su ángulo.

Límites de Potencia reactiva en una Barra de tensión Controlada: En el cálculo del flujo de potencias en un SEP con Barras de tensión controlada es necesario tomar en cuenta los límites de potencia reactiva de las fuentes de potencia.

Sea p una BTC, entonces el valor de Q_p se puede escribir como:

$$Q_p = Q_{Gp} - Q_{Cp} \quad (3.23)$$

Además:

$(Q_{Gp})_{\text{máx}}$: Valor máximo de generación de potencia reactiva de la fuente.

$(Q_{Gp})_{\text{mín}}$: Valor mínimo de generación de potencia reactiva de la fuente.

Q_{Cp} : Potencia reactiva de la carga en la barra

Los límites de potencia reactiva para la barra p serán:

$$(Q_p)_{\min} \leq Q_p \leq (Q_p)_{\max} \quad (3.24)$$

$$\text{donde: } (Q_p)_{\min} = (Q_{Gp})_{\min} - Q_{Cp} \text{ y } (Q_p)_{\max} = (Q_{Gp})_{\max} - Q_{Cp}$$

Si el valor de la potencia reactiva calculado según (3.22) en una iteración cualquiera k, Q_p^k , excede el límite máximo o mínimo prefijado, significa que es imposible obtener una solución con la tensión especificada en esta barra y en consecuencia, ella debe ser considerada como una barra de carga en esa iteración, en la cual la potencia reactiva es igual al límite superior e inferior según corresponda. En las iteraciones siguientes, el método intentará mantener el voltaje especificado originalmente en esa barra, siempre que no se violen los límites de Q_p . Esto es posible, porque pueden ocurrir cambios en otros puntos del sistema, que lo permitan.

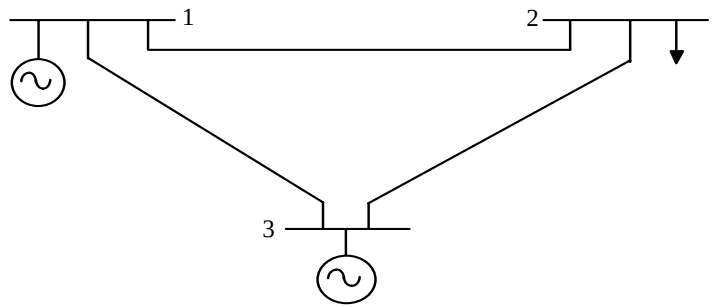
Para explicar mejor el procedimiento, considérese el sistema de 3 barras de la Figura 3.6.

Sean:

Barra 1: Flotante

Barra 2: de carga

Barra 3: de tensión controlada



La secuencia de cálculo aplicando el Método de Gauss-Seidel Y_B es:

Figura 3.6.- Sistema de tres barras para explicar el método de Gauss-Seidel Y_B

1. Especificar los datos necesarios: V_1 , θ_1 , P_2 , Q_2 , P_3 , V_3 y los parámetros para determinar la matriz Y_B
2. Suponer los valores iniciales: $V_2^0, \theta_2^0, \theta_3^0$. Normalmente se usa 1,0 (pu) para los módulos de voltaje y 0° para los ángulos; V_3 está especificado.

3. Calcular la tensión en la barra 2

$$\dot{V}_2^1 = \frac{1}{\dot{Y}_{22}} \left[\frac{P_2 - jQ_2}{(V_2^0)^*} - \dot{Y}_{21} \dot{V}_1 - \dot{Y}_{23} \dot{V}_3^0 \right] \quad (3.25)$$

4. Calcular la potencia reactiva en la barra 3

$$Q_3^0 = -\text{Im} \left\{ (V_3^0)^* (\dot{Y}_{31} \dot{V}_1 + \dot{Y}_{32} \dot{V}_2^1 + \dot{Y}_{33} \dot{V}_3^0) \right\} \quad (3.26)$$

5. Verificar si Q_3^0 está dentro de los límites establecidos
6. Si Q_3^0 está dentro de los límites, determinar la tensión en la barra 3 según (3.27), mantener el valor especificado para V_3 y cambiar el ángulo inicial por el determinado con (3.27)

$$\dot{V}_3^1 = \frac{1}{\dot{Y}_{33}} \left[\frac{P_3 - jQ_3^0}{(V_3^0)^*} - \dot{Y}_{31} \dot{V}_1 - \dot{Y}_{32} \dot{V}_2^1 \right] \quad (3.27)$$

7. Si Q_3^0 no está dentro de los límites, reemplazar Q_3^0 en (3.27) por el valor del límite excedido, tomando el valor de $\dot{V}_3^1$ calculado en (3.27) completo (módulo y ángulo).

8. Verificar que se cumpla el criterio de convergencia tal como se indica en ecuación (3.20), por ejemplo, en todas las barras. Si se cumple, el proceso de cálculo de las tensiones finaliza y se determinan los flujos de potencia y las pérdidas en las líneas según ecuaciones (3.6) y (3.7) y (3.8).
9. Si el criterio de convergencia no se cumple, volver al punto 3 y repetir el proceso.

Ejemplo 3.1. Para el sistema de tres barras de la Figura 3.7, los datos en pu, base común, se dan en las Tablas N° 1 y N° 2. Realizar una iteración con el método de Gauss-Seidel Y_B , para determinar el voltaje en todas las barras. Con los valores obtenidos, determinar los flujos de potencia en todas las líneas, las pérdidas del sistema, la potencia entregada por el generador de la barra slack y la verificación de la potencia entregada a la carga S_{C1} .

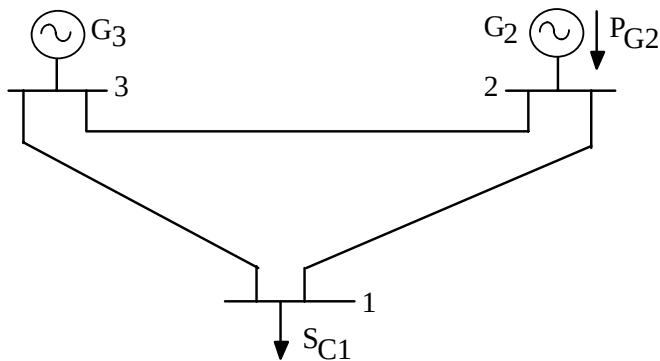


Figura 3.7

Tabla N° 1: Datos de las líneas		
Línea	Z (pu)	Y'/2 (pu)
1-2	0,04+j0,12	j0,05
1-3	0,02+j0,06	j0,06
2-3	0,06+j0,18	j0,05

Tabla N° 2: Datos de las barras						
Barra N°	Tipo	V (pu)	PG	QG	PC	QC
1	PQ	-	-	-	0,6	0,25
2	PV	1,04	0,2	-	0,0	0,0
3	SL	1,06	-	-	0,0	0,0

Límites de generación de Q en la barra 2: $-1 \leq Q_{G2} \leq 1$

Solución:

a) Determinación de la matriz de admitancia de barras Y_B

$$Y_{11} = \frac{1}{0,04 + j0,12} + \frac{1}{0,02 + j0,06} + j0,05 + j0,06 = 7,5 - j22,39 = 23,6128 \angle -71,48^\circ$$

$$Y_{22} = \frac{1}{0,04 + j0,12} + \frac{1}{0,06 + j0,18} + j0,05 + j0,05 = 4,1667 - j12,4 = 13,0813 \angle -71,43^\circ$$

$$Y_{33} = \frac{1}{0,02 + j0,06} + \frac{1}{0,06 + j0,18} + j0,06 + j0,05 = 6,6667 - j19,89 = 20,9775 \angle -71,47^\circ$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -\frac{1}{0,04 + j0,12} = -2,5 + j7,5 = 7,9057 \angle 108,43^\circ$$

$$Y_{23} = Y_{32} = -\frac{1}{0,06 + j0,18} = -1,6667 + j5 = 5,2705 \angle 108,43^\circ$$

$$Y_{31} = Y_{13} = -\frac{1}{0,02 + j0,06} = -5 + j15 = 15,8114 \angle 108,43^\circ$$

b) Valores iniciales y otros datos

$$\dot{V}_1^0 = 1 \angle 0^\circ; \dot{V}_2^0 = 1,04 \angle 0^\circ; \dot{V}_3 = 1,06 \angle 0^\circ, \text{ especificado (Barra slack)}$$

$$\dot{S}_1 = 0 - 0,6 + j(0 - 0,25) = -0,6 - j0,25; P_2 = 0,2 - 0 = 0,2$$

$$\text{Límites de Q en la barra 2: } -1 \leq Q_2 \leq 1$$

c) Proceso iterativo: Utilizando la ecuación (3.19)

$$\dot{V}_1^1 = \frac{1}{23,6128 \angle -71,48^\circ} \left\{ \frac{-0,6 + j0,25}{1 \angle 0^\circ} - 7,9057 \angle 108,43^\circ * 1,04 \angle 0^\circ - 15,8114 \angle 108,43^\circ * 1,06 \angle 0^\circ \right\}$$

$$\dot{V}_1^1 = 1,0401 \angle -1,23^\circ$$

Antes de determinar $\dot{V}_2^1$ se debe calcular la potencia reactiva neta de la barra 2, expresión (3.22)

$$Q_2^0 = -\text{Im}\{7,9057 \angle 108,43^\circ * 1,0401 \angle -1,23^\circ + 13,0813 \angle -71,43^\circ * 1,04 \angle 0^\circ + 5,2705 \angle 108,43^\circ * 1,06 \angle 0^\circ\} * 1,04 \angle 0^\circ$$

$$Q_2^0 = -0,2693 \quad (\text{está entre los límites})$$

La tensión $\dot{V}_2^1$ se determina usando de nuevo la expresión (3.19), es decir:

$$\dot{V}_2^1 = \frac{1}{13,0813 \angle -71,43^\circ} \left\{ \frac{0,2 + j0,2693}{1,04 \angle 0^\circ} - 7,9057 \angle 108,43^\circ * 1,0401 \angle -1,23^\circ - 5,2705 \angle 108,43^\circ * 1,06 \angle 0^\circ \right\}$$

$$\dot{V}_2^1 = 1,0414 \angle 0,23^\circ \Rightarrow \dot{V}_2^1 = 1,04 \angle 0,23^\circ$$

d) Cálculo de los flujos de potencia en las líneas: Usando las expresiones (3.6) y (3.7) y considerando que:

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{1}{0,04 + j0,12} = 2,5 - j7,5 = 7,9057 \angle -71,57^\circ$$

$$Y_{23} = Y_{32} = \frac{1}{0,06 + j0,18} = 1,6667 - j5 = 5,2705 \angle -71,57^\circ$$

$$Y_{31} = Y_{13} = \frac{1}{0,02 + j0,06} = 5 - j15 = 15,8114 \angle -71,57^\circ$$

se tiene:

$$\dot{S}_{12} = \{7,9057 \angle 71,57^\circ + 0,05 \angle -90^\circ\} * 1,0401^2 - 1,0401 \angle -1,23^\circ * 1,04 \angle -0,23^\circ * 7,9057 \angle 71,57^\circ$$

$$\dot{S}_{12} = -0,2056 + j0,0182 = 0,2064 \angle 174,94^\circ$$

$$\dot{S}_{21} = \{7,9057 \angle 71,57^\circ + 0,05 \angle -90^\circ\} * 1,04^2 - 1,04 \angle 0,23^\circ * 1,0401 \angle 1,23^\circ * 7,9057 \angle 71,57^\circ$$

$$\dot{S}_{21} = 0,2073 - j0,1211 = 0,2401 \angle -30,29^\circ$$

$$\dot{S}_{23} = \{5,2705 \angle 71,57^\circ + 0,05 \angle -90^\circ\} * 1,04^2 - 1,04 \angle 0,23^\circ * 1,06 \angle 0^\circ * 5,2705 \angle 71,57^\circ$$

$$\dot{S}_{23} = -0,0125 - 0,1654 = 0,1659 \angle -94,33^\circ$$

$$\dot{S}_{32} = \{5,2705 \angle 71,57^\circ + 0,05 \angle -90^\circ\} * 1,06^2 - 1,06 \angle 0^\circ * 1,04 \angle -0,23^\circ * 5,2705 \angle 71,57^\circ$$

$$\dot{S}_{32} = 0,0132 + j0,0572 = 0,05875 \angle 77,0^\circ$$

$$\dot{S}_{31} = \{15,8114 \angle 71,57^\circ + 0,06 \angle -90^\circ\} * 1,06^2 - 1,06 \angle 0^\circ * 1,0401 \angle 1,23^\circ * 15,8114 \angle 71,57^\circ$$

$$\dot{S}_{31} = 0,4617 + j0,1345 = 0,4809 \angle 16,24^\circ$$

$$\dot{S}_{13} = \{15,8114 \angle 71,57^\circ + 0,06 \angle -90^\circ\} * 1,0401^2 - 1,0401 \angle -1,23^\circ * 1,06 \angle 0^\circ * 15,8114 \angle 71,57^\circ$$

$$\dot{S}_{13} = -0,4572 - 0,2533 = 0,5227 \angle -151,01^\circ$$

e) Pérdidas: Utilizando la ecuación (3.8) se tiene:

$$\dot{S}_{L12} = \dot{S}_{12} + \dot{S}_{21} = -0,2056 + j0,0182 + 0,2073 - j0,1211 = 0,0017 - j0,1029$$

$$\dot{S}_{L23} = \dot{S}_{23} + \dot{S}_{32} = -0,0125 - j0,1654 + 0,0132 + j0,0572 = 0,0007 - j0,1082$$

$$\dot{S}_{L31} = \dot{S}_{31} + \dot{S}_{13} = 0,4617 + j0,1345 - 0,4572 - j0,2533 = 0,0045 - j0,1188$$

f) Potencia entregada por el generador de la barra slack

$$\dot{S}_{G3} = \dot{S}_{31} + \dot{S}_{32} = 0,4617 + j0,1345 + 0,0132 + j0,0572 = 0,4749 + j0,1917$$

g) Verificación de la potencia recibida por la carga S_{C1}

$$\dot{S}_{C1} = -\dot{S}_{12} - \dot{S}_{13} = -(-0,2056 + j0,0182) - (-0,4572 - j0,2533) = 0,6628 + j0,2351$$

Observación: No corresponde exactamente al valor especificado para la carga. ¿Porqué?

Factores de Aceleración: La experiencia con el método de Gauss-Seidel Y_B para el cálculo de flujos de potencia ha mostrado que se puede reducir considerablemente el número de iteraciones requeridas si la corrección en el voltaje de cada barra se multiplica por alguna constante que la incremente, para que el voltaje sea más cercano al valor al que se está aproximando. El multiplicador que realiza esto, se denomina **factor de aceleración**. La diferencia entre el valor de voltaje de la barra p calculado en la iteración actual $\dot{V}_p^{k+1}$ y el mejor que se obtuvo en la iteración anterior $(\dot{V}_p^k)_{ac}$ se multiplica por un α apropiado para obtener una mejor corrección que se agrega a este último. Es decir:

$$(\dot{V}_p^{k+1})_{ac} = (\dot{V}_p^k)_{ac} + \alpha [\dot{V}_p^{k+1} - (\dot{V}_p^k)_{ac}] \quad (3.28)$$

La elección del valor de α depende del sistema en estudio. Hay valores óptimos de los factores de aceleración para cualquier sistema. Una mala selección de ellos puede dar como resultado una convergencia menos rápida o hacerla imposible. Normalmente, en los estudios de flujos de potencia, α varía entre 1,3 y 1,8. Generalmente, un factor de aceleración de 1,6 para las componentes real e imaginaria es una buena selección. Sin embargo, es posible que el factor de aceleración utilizado para la componente real pueda diferir del usado para la componente imaginaria.

3.5.3. Método de Newton Raphson

a. Formulación general: Este método es mas sofisticado que los anteriores y exige un mayor volumen de cálculos, pero asegura convergencia en un mayor número de veces y además en forma más rápida. El problema matemático a resolver consiste en n relaciones no lineales del tipo $f(x_i)=0$. Es decir, se trata de un sistema de n ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si se supone una estimación inicial del vector solución:

$$[x^0] = [x_1^0 \quad x_2^0 \quad \dots \quad x_n^0] \quad (3.30)$$

Al que le falta un residuo $[\Delta x^0] = [\Delta x_1^0 \ \Delta x_2^0 \ \dots \Delta x_n^0]$, para llegar a la solución correcta; esto es, tener $f(x_i^0 + \Delta x_i^0) = 0$, aunque $f(x_i^0) \neq 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n^0) &= 0 \\ f_2(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n^0) &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^0 + \Delta x_1^0, x_2^0 + \Delta x_2^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n^0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Desarrollando cada ecuación en serie de Taylor en torno a los valores x_i^0 se tiene:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0 + \Delta x_1^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n^0) &= f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1^0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^0 + \dots + \Delta x_n^0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)^0 + \phi_1 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^0 + \Delta x_1^0, \dots, x_n^0 + \Delta x_n^0) &= f_n(x_1^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1^0 \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)^0 + \dots + \Delta x_n^0 \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)^0 + \phi_n \end{aligned} \quad (3.32)$$

donde ϕ_i es el residuo en la serie de Taylor, que contiene los términos de orden superior

$\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^0$: representa las correspondientes derivadas parciales, evaluadas en x_i^0

Como los Δx_i^0 son pequeños, se pueden despreciar los términos de orden superior y se obtiene:

$$\begin{aligned} f_1(x_1^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1^0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^0 + \dots + \Delta x_n^0 \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)^0 &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^0, \dots, x_n^0) + \Delta x_1^0 \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)^0 + \dots + \Delta x_n^0 \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)^0 &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

con $i, j = 1, 2, \dots, n$

Matricialmente se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} f_1(x_i^0) \\ \vdots \\ f_n(x_i^0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)^0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)^0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \vdots \\ \Delta x_n^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Es decir:

$$[f(x^0)] + [J^0] [\Delta x^0] = [0] \quad (3.35)$$

Donde cada vector y matriz está definido según las ecuaciones (3.34) y (3.35), o sea:

$$\begin{bmatrix} f(x^0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_i^0) \\ \vdots \\ f_n(x_i^0) \end{bmatrix} \quad \text{Vector función evaluada en } x_i^0$$

$$\begin{bmatrix} J^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)^0 & \dots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)^0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_1} \right)^0 & \dots & \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right)^0 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz Jacobiana evaluada en } x_i^0$$

$$\begin{bmatrix} \Delta x^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1^0 \\ \vdots \\ \Delta x_n^0 \end{bmatrix} \quad \text{Vector residuo evaluado en } x_i^0$$

A partir de (3.35), el vector residuo evaluado en x_i^0 ; $\begin{bmatrix} \Delta x^0 \end{bmatrix}$ se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \Delta x^0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} J^0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x^0) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

En general entonces, el residuo en una iteración k es:

$$\begin{bmatrix} \Delta x^k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x^k) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Suponiendo que se conoce $\begin{bmatrix} x^k \end{bmatrix}$ (vector de valores aproximados de la variable), entonces puede obtenerse una aproximación mejor $\begin{bmatrix} x^{k+1} \end{bmatrix}$ de la forma:

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x^k) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Como se han despreciado los términos de orden superior, $\begin{bmatrix} x^{k+1} \end{bmatrix}$ no será la solución correcta y se debe repetir el proceso en forma iterativa, hasta que se satisfaga algún criterio de convergencia, tal como:

$$\left| x^{k+1} - x^k \right| \leq \varepsilon \quad (3.39)$$

b. Aplicación al cálculo de flujos de potencia: En el caso de un Sistema de Potencia, los x_i corresponden a las tensiones de las barras (módulo y ángulo), de manera que la ecuación (3.37) se puede escribir como:

$$\begin{bmatrix} \Delta \theta^k \\ \Delta V^k \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} J^k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P^k \\ \Delta Q^k \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

en que:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^{\text{esp}} - P^{\text{calc}} \\ Q^{\text{esp}} - Q^{\text{calc}} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

Donde P^{esp} y Q^{esp} son los valores de P y Q especificados o programados y P^{calc} y Q^{calc} son los respectivos valores que se van calculando en cada iteración. Para mayor comodidad, a los valores calculados, se les eliminará el superíndice calc, es decir, se designarán simplemente como P y Q.

Según (3.21), los valores de P y Q en la barra p se pueden obtener a partir de:

$$\dot{S}_p = P_p + jQ_p = \dot{V}_p \sum_{q=1}^n Y_{pq}^* V_q^* \quad (3.42)$$

Expresando los voltajes de barras en forma polar y las admitancias de línea en forma rectangular se tiene que:

$$\dot{V}_p = V_p \angle \theta_p ; \quad \dot{V}_q = V_q \angle \theta_q \quad y \quad \dot{Y}_{pq} = G_{pq} + jB_{pq} \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.43) en (3.42), con $\theta_{pq} = \theta_p - \theta_q$ se obtiene:

$$\dot{S}_p = P_p + jQ_p = \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} - jB_{pq}) (\cos \theta_{pq} + j \sin \theta_{pq}) \quad (3.44)$$

de (3.44) se obtiene finalmente:

$$P_p = \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) \quad (3.45)$$

$$Q_p = \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} \sin \theta_{pq} - B_{pq} \cos \theta_{pq})$$

A partir de (3.41) y (3.45), ΔP y ΔQ para la barra p se pueden determinar como:

$$\Delta P_p = P_p^{esp} - \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) \quad (3.46)$$

$$\Delta Q_p = Q_p^{esp} - \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} \sin \theta_{pq} - B_{pq} \cos \theta_{pq})$$

Por lo tanto se puede escribir a manera de resumen:

- Para las barras PQ y PV

$$\Delta P_p = P_p^{esp} - \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) \quad (3.47)$$

- Para las barras PQ

$$\Delta Q_p = Q_p^{esp} - \sum_{q=1}^n V_p V_q (G_{pq} \sin \theta_{pq} - B_{pq} \cos \theta_{pq}) \quad (3.48)$$

- Para la barra slack no se requiere ecuaciones.

En las ecuaciones anteriores, las magnitudes de las tensiones en las barras PV y slack al igual que el ángulo en la barra slack no son variables, sino que se mantienen en sus valores especificados. Por lo tanto, el sistema formulado incluye dos ecuaciones para cada barra PQ y una para cada barra PV. Las variables del problema son V y θ para cada barra PQ y θ para cada barra PV.

Por razones prácticas se da a la barra slack el número n y se colocan los primeros números a las barras PQ. Luego si se tiene m barras PQ, se tendrá $(n-m-1)$ barras con control de voltaje (barras PV).

La Ecuación (3.40) queda entonces:

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta V \end{bmatrix} = -[J]^{-1} \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Con ΔP y ΔQ calculados según (3.46). Luego, los valores actualizados para θ y V son:

$$\begin{bmatrix} \theta^{k+1} \\ V^{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^k \\ V^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta^k \\ \Delta V^k \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Despejando ΔP y ΔQ de (3.49), considerando (3.34) y arreglando adecuadamente, para hacer más fácil el manejo de las ecuaciones, se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & V \frac{\partial \Delta P}{\partial V} \\ \frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta} & V \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Si se tiene n nodos, m de carga, 1 libre y $n-m-1$ de voltaje controlado las dimensiones de las submatrices que forman el Jacobiano son:

$$\begin{array}{ll} [H] \text{ es de } (n-1) \times (n-1) & [N] \text{ es de } (n-1) \times m \\ [M] \text{ es de } m \times (n-1) & [L] \text{ es de } m \times m \end{array}$$

Según lo anterior, la matriz Jacobiana completa es cuadrada y de dimensión, $[(n-1)+m] \times [(n-1)+m]$.

A partir de (3.51), se obtiene que:

$$\begin{array}{ll} H_{pq} = \frac{\partial \Delta P_p}{\partial \theta_q} & N_{pq} = V_q \frac{\partial \Delta P_p}{\partial V_q} \\ M_{pq} = \frac{\partial \Delta Q_p}{\partial \theta_q} & L_{pq} = V_q \frac{\partial \Delta Q_p}{\partial V_q} \end{array} \quad (3.52)$$

Considerando (3.46), se pueden determinar todos los elementos de la matriz Jacobiana como sigue:

– para $p \neq q$

$$\begin{array}{l} H_{pq} = -V_p (G_{pq} \sin\theta_{pq} - B_{pq} \cos\theta_{pq}) V_q \\ N_{pq} = -V_p (G_{pq} \cos\theta_{pq} + B_{pq} \sin\theta_{pq}) V_q \\ M_{pq} = V_p (G_{pq} \cos\theta_{pq} + B_{pq} \sin\theta_{pq}) V_q \\ L_{pq} = -V_p (G_{pq} \sin\theta_{pq} - B_{pq} \cos\theta_{pq}) V_q \end{array} \quad (3.53)$$

Se puede apreciar, que por la forma de la ecuación (3.51):

$$\begin{array}{l} H_{pq} = L_{pq} \\ N_{pq} = -M_{pq} \end{array} \quad (3.54)$$

Para $p = q$

$$\begin{aligned} H_{pp} &= B_{pp} V_p^2 + Q_p \\ N_{pp} &= -G_{pp} V_p^2 - P_p \\ M_{pp} &= G_{pp} V_p^2 - P_p \\ L_{pp} &= B_{pp} V_p^2 - Q_p \end{aligned} \quad (3.55)$$

Las expresiones (3.54) y (3.55) muestran lo importante que fue el haber planteado la matriz Jacobiana tal como se hizo en (3.51). Utilizando este tipo de coordenadas, el valor de Q en las barras PV puede ser calculado luego que el proceso haya convergido.

El proceso mediante el método de Newton-Raphson para calcular los voltajes en las barras, se muestra en la Figura 3.8, luego de lo cual se determinan los flujos de potencia y las pérdidas en las líneas.

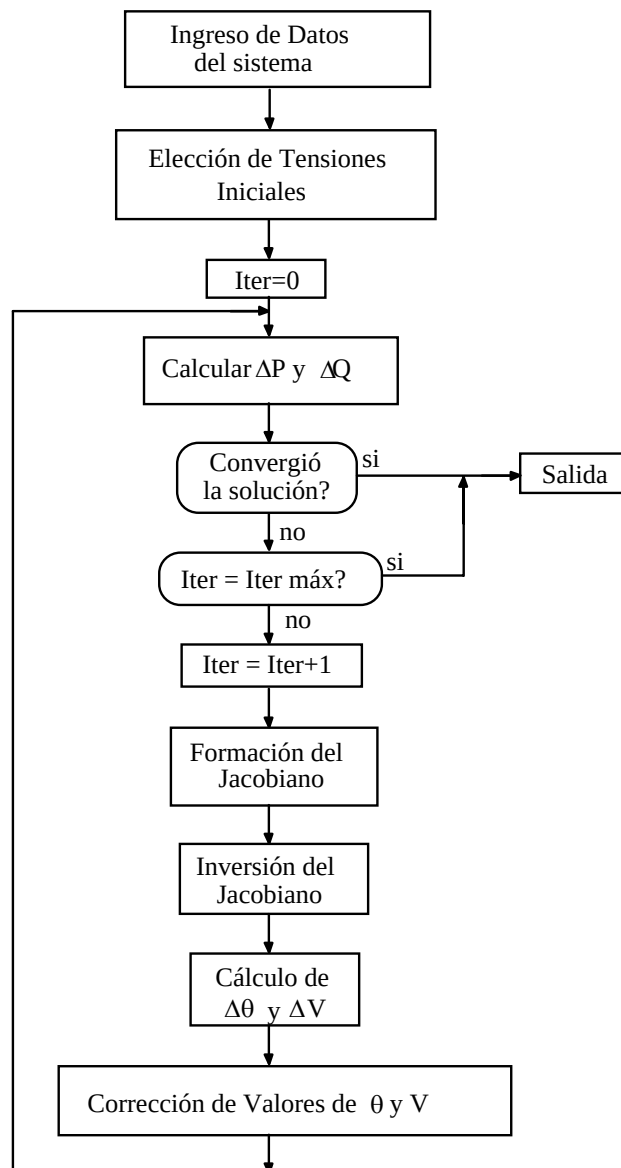


Figura 3.8.- Diagrama de Flujo del Algoritmo de Newton-Raphson

En estricto rigor, la matriz Jacobiana se calcula e invierte en cada iteración. Sin embargo, en la práctica se recalcula usualmente sólo un determinado número de veces en un rango de iteraciones, con el fin de aumentar la velocidad al proceso iterativo.

Ejemplo 3.2. En el sistema del ejemplo 3.1 y, considerando los valores de voltajes obtenidos mediante el método de Gauss-Seidel, determine el Jacobiano completo en la iteración 1

Solución: La matriz Jacobiana queda de la siguiente forma:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta P_1}{\partial \theta_2} & V_1 \frac{\partial \Delta P_1}{\partial V_1} \\ \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \theta_2} & V_1 \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_1} \\ \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial \theta_2} & V_1 \frac{\partial \Delta Q_1}{\partial V_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & N_{11} \\ H_{21} & H_{22} & N_{21} \\ M_{11} & M_{12} & L_{11} \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz Jacobiana se obtienen utilizando las expresiones (3.53) para $p \neq q$ y (3.55) para $p = q$; por lo tanto, para los elementos de la diagonal se deben determinar previamente P y Q, utilizando (3.45) y considerando los resultados obtenidos en el ejemplo 3.1, que se resumen a continuación:

$$[G] = \begin{bmatrix} 7,5 & -2,5 & -5 \\ -2,5 & 4,1667 & -1,6667 \\ -5 & -1,6667 & 6,6667 \end{bmatrix} \quad [B] = \begin{bmatrix} -22,39 & 7,5 & 15 \\ 7,5 & -12,4 & 5 \\ 15 & 5 & -19,89 \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}_1 = 1,0401 \angle -1,23^\circ; \quad \dot{V}_2 = 1,04 \angle 0,23^\circ \quad \dot{V}_3 = 1,06 \angle 0^\circ$$

Con (3.45) se obtiene:

$$P_1 = -0,6628; \quad P_2 = 0,1948; \quad Q_1 = -0,235; \quad Q_2 = -0,2865$$

Con (3.53) y (3.55), la matriz Jacobiana queda:

$$[J] = \begin{bmatrix} -24,4567 & 8,0412 & -7,4508 \\ 8,1790 & -13,6983 & 2,4967 \\ 8,7764 & -2,91 & -23,9867 \end{bmatrix}$$

3.5.4. Método de Newton-Raphson desacoplado (MNRD)

Cuando se resuelven problemas que involucren un número considerable de barras, este método representa una alternativa para mejorar la eficiencia computacional y reducir los requerimientos de memoria. Se hace uso de una versión aproximada del método de Newton-Raphson completo visto en 3.5.3., basada en las siguientes consideraciones:

- Un cambio en el ángulo del voltaje θ en una barra afecta principalmente al flujo de potencia activa P en las líneas y débilmente a la potencia reactiva Q, lo que significa que: $\frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} \gg \frac{\partial \Delta Q}{\partial \theta}$
- Un cambio en el módulo del voltaje V en una barra afecta principalmente al flujo de potencia reactiva Q en las líneas y débilmente a la potencia activa P. Por lo tanto: $\frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \gg \frac{\partial \Delta P}{\partial V}$

De acuerdo con esto, en la ecuación (3.51) N y M se pueden despreciar frente a L y H respectivamente y se puede escribir:

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P}{\partial \theta} & 0 \\ 0 & V \frac{\partial \Delta Q}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \frac{\Delta V}{V} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

o bien:

$$[\Delta P] = -[H][\Delta \theta] \quad (3.57)$$

$$[\Delta Q] = -[L]\left[\frac{\Delta V}{V}\right] \quad (3.58)$$

Estas ecuaciones están desacopladas, en el sentido que las correcciones de los ángulos de los voltajes se calculan usando sólo los cambios en la potencia activa mientras que las correcciones en la magnitud de los voltajes se determinan sólo con los cambios en la potencia reactiva. Sin embargo, las matrices [H] y [L] son interdependientes, porque los elementos de [H] dependen de las magnitudes de los voltajes que se están resolviendo en la ecuación (3.58), mientras que los elementos de [L] dependen de los ángulos de la ecuación (3.57). El procedimiento natural es ir resolviendo alternadamente los dos sistemas de ecuaciones usando en uno, las soluciones más recientes del otro. Esta aproximación significa aumentar el número de iteraciones, lo que en la práctica queda compensado por el menor tiempo en cada iteración, debido a la disminución del tiempo ocupado en la inversión de las matrices [H] y [L] de menor dimensión que la del Jacobiano completo.

Ejemplo 3.3. A partir del ejemplo 3.2 escriba la matriz jacobiana del método de Newton-Raphson desacoplado. Eliminando las submatrices N y M se tiene:

$$[J] = \begin{bmatrix} -24,4567 & 8,04124 & 0 \\ 8,1790 & -13,6983 & 0 \\ 0 & 0 & -23,9867 \end{bmatrix}$$

3.5.5. Método de Newton-Raphson desacoplado rápido (MNRDR)

El método de Newton Raphson desacoplado, requiere la inversión de dos matrices en cada iteración. Para evitar estos cálculos, se introducen más simplificaciones que se justifican por las características que presentan los flujos de potencia en las líneas y los voltajes en las barras de un sistemas de transmisión bien diseñado y operando apropiadamente. Estas características son:

- Las diferencias angulares $\theta_{pq} = \theta_p - \theta_q$ entre los voltajes de dos barras típicas son, por lo general, tan pequeños que:

$$\cos \theta_{pq} = \cos (\theta_p - \theta_q) = 1 \text{ y } \sin \theta_{pq} = \sin (\theta_p - \theta_q) \approx 0 \quad (3.59)$$

- Las susceptancias B_{pq} de las líneas son mucho más grandes que las conductancias G_{pq} , por lo que:

$$G_{pq} \sin (\theta_p - \theta_q) \ll B_{pq} \cos (\theta_p - \theta_q) \quad (3.60)$$

- La potencia reactiva Q_p que se inyecta a cualquier barra p del sistema durante su operación normal es mucho menor que la potencia reactiva que fluiría si todas las líneas de la barra estuvieran en cortocircuito con la referencia. Esto es:

$$Q_p \ll B_{pp} V_p^2 \quad (3.61)$$

Con estas aproximaciones, y usando (3.45) se tiene:

$$P_p = V_p \sum_{q=1}^n (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) V_q \quad (3.62)$$

Es decir:

$$P_p = G_{pp} V_p^2 + V_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n (G_{pq} \cos \theta_{pq} + B_{pq} \sin \theta_{pq}) V_q \quad (3.63)$$

$$Q_p = -V_p \sum_{q=1}^n B_{pq} V_q = -B_{pp} V_p^2 - V_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} V_q \quad (3.64)$$

A partir de (3.63) y (3.64) y considerando (3.46), los elementos de [H] y [L] se obtienen como sigue:

$$H_{pq} = \frac{\partial \Delta P_p}{\partial \theta_q} = B_{pq} V_p V_q \quad L_{pq} = V_q \frac{\partial \Delta Q_p}{\partial V_q} = B_{pq} V_p V_q \quad (3.65)$$

$$H_{pp} = \frac{\partial \Delta P_p}{\partial \theta_p} = B_{pp} V_p^2 - V_p \sum_{q=1}^n B_{pq} V_q = B_{pp} V_p^2 + Q_p \quad (3.66)$$

$$L_{pp} = V_p \frac{\partial \Delta Q_p}{\partial V_p} = 2 B_{pp} V_p^2 + V_p \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} V_q = B_{pp} V_p^2 - Q_p \quad (3.67)$$

según (3.61), las ecuaciones (3.66) y (3.67) quedan:

$$H_{pp} = L_{pp} = B_{pp} V_p^2 \quad (3.68)$$

Considerando (3.57) y (3.58), para el nudo p se puede escribir:

$$\Delta P_p = -H_{pp} \Delta \theta_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n H_{pq} \Delta \theta_q \quad (3.69)$$

$$\Delta Q_p = -L_{pp} \frac{\Delta V_p}{V_p} - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n L_{pq} \frac{\Delta V_q}{V_q} \quad (3.70)$$

Introduciendo (3.65) y (3.68) en (3.69) y (3.70) se obtiene:

$$\Delta P_p = -V_p (B_{pp} V_p \Delta \theta_p + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} V_q \Delta \theta_q) \quad (3.71)$$

$$\Delta Q_p = -V_p (B_{pp} V_p \frac{\Delta V_p}{V_p} + \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} V_q \frac{\Delta V_q}{V_q}) \quad (3.72)$$

Dividiendo ambas ecuaciones por V_p y simplificando los voltajes de la ecuación (3.72), las ecuaciones anteriores quedan:

$$\frac{\Delta P_p}{V_p} = -B_{pp} V_p \Delta \theta_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} V_q \Delta \theta_q \quad (3.73)$$

$$\frac{\Delta Q_p}{V_p} = -B_{pp} \Delta V_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} \Delta V_q \quad (3.74)$$

Se ha reducido la no linealidad de las ecuaciones, lo que debería permitir mejorar el comportamiento del proceso iterativo. Si se fija arbitrariamente los valores de V_p y V_q del segundo miembro de la ecuación (3.73) en 1,0 (pu), los coeficientes de ambas ecuaciones quedan iguales, es decir:

$$\frac{\Delta P_p}{V_p} = -B_{pp} \Delta \theta_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} \Delta \theta_q \quad (3.75)$$

$$\frac{\Delta Q_p}{V_p} = -B_{pp} \Delta V_p - \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq p}}^n B_{pq} \Delta V_q \quad (3.76)$$

Matricialmente se tiene:

$$\left[\frac{\Delta P}{V} \right] = [B'] [\Delta \theta] \quad (3.77)$$

$$\left[\frac{\Delta Q}{V} \right] = [B''] [\Delta V] \quad (3.78)$$

donde B' es el negativo de la parte imaginaria de la matriz Y_B , sin la fila y columna correspondiente a la barra slack y B'' es el negativo de la parte imaginaria de la matriz Y_B sin las filas y columnas correspondientes a las barras slack y PV

Una estrategia típica de solución es la siguiente:

1. Calcular los errores iniciales $\Delta P/V$
2. Resolver la ecuación (3.77) para determinar $\Delta \theta$
3. Actualizar los ángulos θ y usarlos para calcular los errores $\Delta Q/V$
4. Resolver (3.78) para calcular ΔV
5. Actualizar las magnitudes del voltaje V y usarlas para calcular los nuevos errores $\Delta P/V$
6. Volver al punto 2. y repetir el proceso hasta que todos los errores estén dentro de la tolerancias especificadas.

Ejemplo 3.4. Para el ejemplo 3.1 escriba la matriz Jacobiana del método de Newton-Raphson desacoplado rápido.

Solución: A partir de los valores de la matriz $[B]$ del Ejemplo 3.2 se tiene:

$$[B'] = \begin{bmatrix} 22,39 & -7,5 \\ -7,5 & 12,4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [B''] = [22,39]; \text{ por lo tanto: } [J] = \begin{bmatrix} 22,39 & -7,5 & 0 \\ -7,5 & 12,4 & 0 \\ 0 & 0 & 22,39 \end{bmatrix}$$

3.6. Flujo de Carga “DC” o Flujo de Potencia de Corriente Continua

Recibe este nombre no porque se aplique a sistemas que operan con corriente continua. El método es aplicable a los Sistemas Eléctricos de Potencia que operan a corriente alterna haciendo ciertas simplificaciones que permitan analizar la red como si fuera de corriente continua, teniendo la ventaja de que se trabaja con números reales, simplificando mucho los cálculos. Sin embargo, sólo se obtienen los flujos de potencia activa.

El análisis considera la base fundamental de los flujos de potencia en corriente alterna ya estudiados.

Considérese la línea conectada entre los nudos p y q de la Figura 3.9.

La potencia compleja que va desde la barra p a la barra q, es:

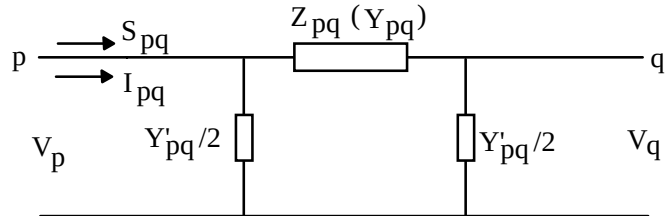


Figura 3.9.- Modelo de una línea de transmisión para el cálculo de flujo de potencia DC

$$\dot{S}_{pq} = \dot{V}_p I_{pq}^* = \dot{V}_p \left[(\dot{V}_p - \dot{V}_q) Y_{pq} + \dot{V}_p (Y'_{pq}/2) \right]^* = P_{pq} + jQ_{pq} \quad (3.79)$$

Sea:

$$\dot{V}_p = V_p \angle \theta_p; \quad \dot{V}_q = V_q \angle \theta_q; \quad \dot{Y}_{pq} = G_{pq} + jB_{pq} \quad \text{y} \quad Y'_{pq} = jB'_{pq} \quad (3.80)$$

$$G_{pq} = \frac{R_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2} \quad \text{y} \quad B_{pq} = -\frac{X_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2} \quad (3.81)$$

Entonces:

$$\dot{S}_{pq} = V_p \angle \theta_p (V_p \angle -\theta_p - V_q \angle -\theta_q) (G_{pq} - jB_{pq}) - jV_p^2 (B'_{pq}/2) \quad (3.82)$$

Es decir:

$$\dot{S}_{pq} = \left[V_p^2 - V_p V_q (\cos \theta_{pq} + j \sin \theta_{pq}) \right] (G_{pq} - jB_{pq}) - jV_p^2 (B'_{pq}/2) \quad (3.83)$$

Por lo que la potencia activa entre las barras p y q es:

$$P_{pq} = (V_p^2 - V_p V_q \cos \theta_{pq}) G_{pq} - B_{pq} V_p V_q \sin \theta_{pq} \quad (3.84)$$

Suposiciones simplificadorias

- a) $V_p = V_q = 1,0$ (pu)
- b) $R_{pq} \ll X_{pq}$
- c) $\theta_{pq} = \theta_p - \theta_q$ es muy pequeño

A partir de b) y considerando (3.81) se tiene que:

$$G_{pq} = \frac{R_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2} \ll \frac{X_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2} \Rightarrow G_{pq} = 0 \quad (3.85)$$

$$B_{pq} = -\frac{X_{pq}}{R_{pq}^2 + X_{pq}^2} = -\frac{1}{X_{pq}} \quad (3.86)$$

Según c)

$$\cos \theta_{pq} = \cos (\theta_p - \theta_q) \approx 1$$

$$\sin \theta_{pq} = \sin (\theta_p - \theta_q) \approx \theta_p - \theta_q \text{ radianes}$$

Por lo tanto (3.84) queda:

$$P_{pq} = -B_{pq} (\theta_p - \theta_q) = \frac{\theta_p - \theta_q}{X_{pq}} \quad (3.87)$$

Para una red eléctrica que tiene n nudos las potencias netas inyectadas en cada nudo se pueden escribir:

$$P_p = \sum_{q=1}^n P_{pq} = \sum_{q=1}^n \frac{\theta_p - \theta_q}{X_{pq}} \quad (3.88)$$

Donde q incluye todos los nudos directamente conectados al nudo p. Luego para los n nudos se tiene

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_p \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1p} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{p1} & \cdots & B_{pp} & \cdots & B_{pn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{np} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_p \\ \vdots \\ \theta_n \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

o sea:

$$[P] = [B][\theta] \quad (3.90)$$

en que:

[P]: Vector de potencias activas netas en las barras

[B]: Matriz de susceptancias del sistema

[θ]: Vector de ángulos de las tensiones de las barras

Los elementos de la matriz [B] se determinan como sigue:

$$B_{pp} = \sum_{q=1}^n \frac{1}{X_{pq}} \quad (3.91)$$

Con p ≠ referencia y donde q incluye todas las líneas conectadas al nudo p

$$B_{pp} = 0 \quad \text{con } p = \text{referencia} \quad (3.92)$$

$$B_{pq} = -\frac{1}{X_{pq}} \quad \text{con } p \text{ y } q \neq \text{referencia} \quad (3.93)$$

$$B_{pq} = 0 \quad \text{con } p = \text{referencia} \text{ ó } q = \text{referencia} \quad (3.94)$$

De acuerdo con lo indicado en las expresiones (3.91) a (3.94), la matriz $[B]$, tal como se planteó en (3.89) es singular ya que la fila y columna correspondientes a la barra de referencia contienen solamente ceros. Así, para un sistema de n barras sólo hay $(n-1)$ ecuaciones linealmente independientes, por lo que se debe considerar la submatriz de $[B]$ con dimensión $(n-1) \times (n-1)$, la que puede invertirse para solucionar el problema del cálculo de los ángulos de fase de las tensiones de las barras. A partir de (3.90) se obtiene entonces:

$$[\theta] = [B]^{-1} [P] \quad (3.95)$$

Como se aprecia, el procedimiento es muy sencillo, ya que el sistema es lineal y por lo tanto todos los ángulos de las tensiones de las barras se pueden determinar utilizando (3.95) para luego mediante (3.87), determinar los flujos de potencia activa en las líneas.

Ejemplo 3.5. Resuelva el Ejemplo 3.1 utilizando el método de Flujo DC.

Solución: A partir de los parámetros dados en el ejemplo 3.1 se tiene:

$$B_{11} = \frac{1}{0,12} + \frac{1}{0,06} = 25; \quad B_{22} = \frac{1}{0,12} + \frac{1}{0,18} = 13,8889; \quad B_{12} = B_{21} = -\frac{1}{0,12} = -8,3333$$

$$B_{33} = B_{31} = B_{13} = B_{23} = B_{32} = 0$$

Por otra parte: $P_1 = -0,6$; $P_2 = 0,2$; luego, la ecuación matricial queda, según (3.90):

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -8,3333 \\ -8,3333 & 13,8889 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -8,3333 \\ -8,3333 & 13,8889 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6 \\ 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,024 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con estos valores se determinan los flujos de potencia activa en las líneas, utilizando (3.87)

$$P_{12} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{X_{12}} = \frac{-0,024 - 0}{0,12} = -0,2$$

$$P_{13} = \frac{\theta_1 - \theta_3}{X_{13}} = \frac{-0,024 - 0}{0,06} = -0,4$$

$$P_{23} = \frac{\theta_2 - \theta_3}{X_{23}} = \frac{0 - 0}{0,18} = 0$$

La potencia que entrega el generador en la barra slack es:

$$P_{G3} = P_{32} + P_{31} = 0 + 0,4 = 0,4$$

La potencia recibida por la carga es:

$$P_{C1} = P_{21} + P_{31} = 0,2 + 0,4 = 0,6$$

3.7. Cálculo de flujo de potencia en sistemas radiales

3.7.1. Introducción

La gran mayoría de los sistemas de distribución en media tensión son de tipo radial u operan en forma radial, donde el sistema típico contiene sólo una barra desde donde salen los diferentes alimentadores (barra slack), que representa a la subestación de poder y por lo tanto los flujos de potencia tienen un sentido único. Por otra parte, la resistencia de las líneas es comparable con la reactancia inductiva. Estas y otras características propias hace poco recomendable usar los métodos tradicionales de cálculos, tales como el de Gauss-Seidel y los de Newton-Raphson, por ejemplo, que se emplean en sistemas de transmisión.

La principal característica de los métodos de cálculo de flujo de potencia radial es que hacen uso de la estructura topológica radial de la red. Los más conocidos son los Métodos: Escalonado, Suma de Corrientes y Suma de Potencias, siendo estos dos últimos, los más utilizados.

El Método Escalonado resuelve la red aguas arriba, suponiendo primeramente un perfil de tensión y aplicando directamente las leyes de Kircchoff, hasta llegar al nodo fuente. El error que se obtenga entre el voltaje de este nodo y el determinado en el proceso, se suma al perfil de tensión previamente supuesto a fin de obtener un nuevo perfil de tensiones para la próxima iteración. El proceso termina cuando el voltaje calculado en el nodo fuente es el especificado o la diferencia entre ellos es pequeña.

Los métodos Suma de Corriente y Suma de Potencias constan de dos procesos, uno aguas arriba en que previamente supuesto un perfil de tensiones, se calculan las corrientes en el primero y las potencias equivalentes en el segundo y el otro aguas abajo en que se obtienen los nuevos valores para las tensiones de las barras. Este será el perfil de tensión para la próxima iteración y el proceso termina cuando se cumple el criterio de convergencia adoptado.

De acuerdo a estudios realizados, el Método Suma de Potencias, es más robusto y presenta mejores características de convergencia que los Métodos Escalonado y Suma de Corrientes. Por esta razón, el problema se resolverá considerando este método. Previamente es necesario analizar la forma en que se modela el sistema que, como se dijo, presenta diferencias importantes respecto a los de transmisión de energía eléctrica.

3.7.2. Modelación del sistema

a. Modelación de la red: La red se modela a través de su equivalente monofásico, cuando se trabaja en condiciones balanceadas. En el caso en que se presenten cargas monofásicas y/o bifásicas se debe trabajar con un modelo trifásico. La red se puede representar de distintas formas; sin embargo, se puede aprovechar su radialidad, asignando a la barra slack el número cero y haciendo coincidir el número de cada rama con el de la barra ubicada al final de ella. Con este ordenamiento, las barras se deben numerar por niveles, de izquierda a derecha, tal como se muestra en la Figura 3.10

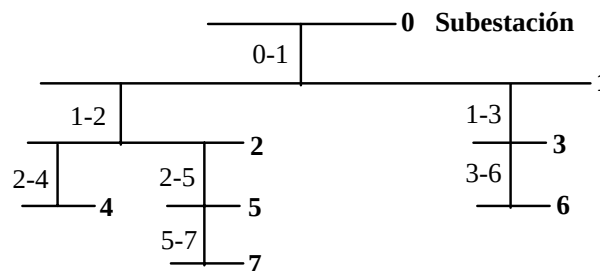


Figura 3.10.- Red de 7 barras

b.- Modelación de las barras: Todas las barras, excepto la de la subestación se pueden considerar como de carga (PQ), donde se conocen la potencia activa y reactiva o en su defecto, se puede considerar la potencia aparente nominal del transformador de distribución y su respectivo factor de potencia.

c.- Modelación de las ramas: Se representan por su resistencia y reactancia serie en pu o en Ω /fase. Dados los niveles de tensión y los largos de las líneas, se desprecia su efecto capacitivo.

d.- Modelación de los transformadores de distribución: Debido a que estos equipos se presentan en gran cantidad y contribuyen en forma significativa a las pérdidas del sistema, se representan a través de su impedancia de cortocircuito, incluyendo las pérdidas de potencia activa y reactiva en el núcleo.

e.- Modelación de las cargas: En general, las potencias de las cargas son función de la frecuencia y de la tensión. Considerando que la frecuencia prácticamente no varía, las cargas se pueden representar por distintos modelos que son función del voltaje aplicado, según se indica en la ecuación (3.96), donde S es la potencia aparente; V el módulo de la tensión; S_0 la potencia aparente nominal y k, un parámetro característico que puede tomar los siguientes valores: $k=0$ (potencia constante); $k=1$ (corriente constante) y $k=2$ (Impedancia constante).

$$S = S_0 V^k \quad (3.96)$$

f.- Modelación de los condensadores shunt: Se modelan de la misma forma que las cargas.

3.7.3. Método Suma de Potencias

a.- Cálculo de las potencias equivalentes: Dado un perfil de tensiones, se determinan las potencias activas y reactivas en los consumos (vistas desde los terminales de los transformadores de distribución), además de las potencias reactivas inyectadas por los condensadores. En un proceso simultáneo aguas arriba de la red, se calculan las potencias equivalentes en las barras y las pérdidas de potencia en las líneas. La Figura 3.11 muestra una barra cualquiera i y todas las ramas k conectadas directamente a ella, donde la potencia compleja equivalente S_i demandada por la carga y por la red aguas abajo de la barra es:

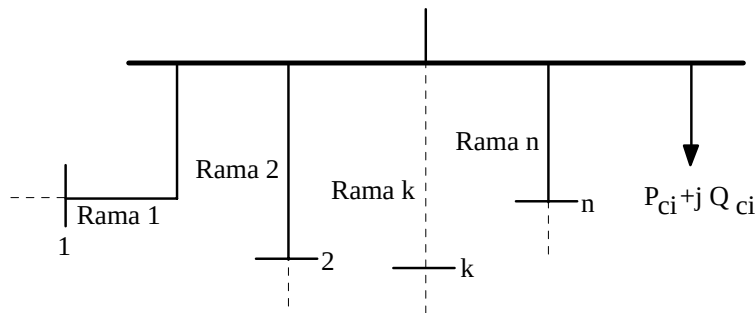


Figura 3.11.- Diagrama de un nudo cualquiera

$$\dot{S}_i = \dot{S}_{ci} + \sum_k \dot{S}_k + \sum_k L_k = P_i + jQ_i \quad (3.97)$$

donde:

S_{ci} : Potencia compleja de carga en la barra i

S_k : Potencia compleja equivalente en el nudo k

L_k : Potencia compleja perdida en la rama k

Las pérdidas de potencia activa L_{pk} y reactiva L_{qk} se determinan separadamente a partir de:

$$\begin{aligned} L_{pk} &= \frac{R_k(P_k^2 + Q_k^2)}{V_k^2} \\ L_{qk} &= \frac{X_k(P_k^2 + Q_k^2)}{V_k^2} \end{aligned} \quad (3.98)$$

b.- Cálculo de los voltajes: Este proceso se realiza aguas abajo, partiendo de la barra siguiente a la slack, ya que en ésta (la barra slack) se conoce el voltaje en módulo y ángulo; usando las potencias equivalentes determinadas anteriormente. La Figura 3.12 muestra un tramo de línea para determinar el voltaje en la barra i , a partir del voltaje (conocido) en la barra $i-1$. Aplicando la ley de Kirchhoff de tensiones se puede escribir:

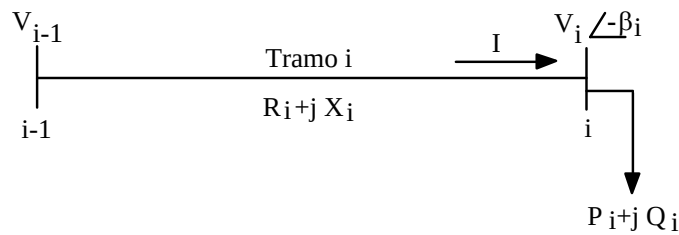


Figura 3.12.- Tramo de línea de un alimentador cualquiera

$$\dot{V}_{i-1} = \dot{V}_i + (R_i + jX_i) \left(\frac{P_i - jQ_i}{V_i^*} \right) \quad (3.99)$$

Amplificando la expresión por V_i^* y separando en parte real e imaginaria se tiene

$$\begin{aligned} V_{i-1} V_i \cos \beta_i &= (R_i P_i + X_i Q_i) + V_i^2 \\ V_{i-1} V_i \sin \beta_i &= (X_i P_i - R_i Q_i) \end{aligned} \quad (3.100)$$

Elevando al cuadrado y sumando se obtiene:

$$V_i^4 + A_i V_i^2 + B_i = 0 \quad (3.101)$$

donde:

$$\begin{aligned} A_i &= 2(R_i P_i + X_i Q_i) - V_{i-1}^2 \\ B_i &= (P_i^2 + Q_i^2)(R_i^2 + X_i^2) \end{aligned} \quad (3.102)$$

La ecuación (3.101) no depende del ángulo de desfase entre las tensiones β y tiene cuatro soluciones de la forma siguiente:

$$V_i = \pm \sqrt{-\frac{A_i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_i}{2}\right)^2 - B_i}} \quad (3.103)$$

Por otra parte, según la ecuación (2.2), la caída de voltaje en una línea corta se puede escribir para este caso como:

$$\Delta V_i = \frac{R_i P_i + X_i Q_i}{V_i} \quad (3.104)$$

y las pérdidas de potencia aparente al cuadrado como:

$$L_{si}^2 = \frac{(R_i^2 + X_i^2)(P_i^2 + Q_i^2)}{V_i^4} \quad (3.105)$$

Considerando que en condiciones normales de operación, las caídas de voltaje y las pérdidas del sistema deben ser pequeñas y que los módulos de los voltajes son cercanos a la unidad, en la ecuación (3.102) se tiene que: A_i será siempre negativo y B_i positivo y de valor reducido. Por lo tanto, en la ecuación (3.103) el término $((A_i/2)^2 - B_i)$ será siempre positivo y cercano a $(A_i/2)^2$. De esta forma, la única solución que tiene sentido físico es de la forma:

$$V_i = + \sqrt{-\frac{A_i}{2} + \sqrt{\left(\frac{A_i}{2}\right)^2 - B_i}} \quad (3.106)$$

Una vez que se conocen las magnitudes de los voltajes en todas las barras, se pueden determinar los ángulos de éstos, a partir de la ecuación (3.100)

$$\beta_i = \text{tg}^{-1} \left(\frac{(X_i P_i - R_i Q_i)}{(R_i P_i + X_i Q_i) + V_i^2} \right) \quad (3.107)$$

c.- Criterios de convergencia: La ecuación (3.106) debe resolverse en forma iterativa y por lo tanto, para terminar el proceso de cálculo se debe establecer algún criterio de convergencia. Existen diversas formas de detener el proceso, entre las cuales se pueden mencionar: Suma de las pérdidas totales, Potencia en cada carga, Fasor tensión en cada barra, Potencia equivalente en cada barra, Pérdidas en la barra flotante, Módulo de la tensión en cada barra y Potencia en la barra flotante. De todas ellas, las que más se emplean son, el Módulo de la tensión en cada barra, por su fácil programación y el de la potencia en la barra flotante porque sólo se realiza una comparación en cada iteración. Estos criterios se pueden expresar respectivamente como:

$$|V_i^{k+1} - V_i^k| \leq \varepsilon \quad (3.108)$$

$$\begin{aligned} |P_0^{k+1} - P_0^k| &\leq \varepsilon_1 \\ |Q_0^{k+1} - Q_0^k| &\leq \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.109)$$

Problemas propuestos

3.1. En el sistema mostrado en la Figura 3.13, empleando el método de Gauss Seidel- Y_B , calcular la tensión en las barras 2 y 3 en la segunda iteración ($\dot{V}_2^2$ y $\dot{V}_3^2$) y la potencia compleja entregada por el generador en estas condiciones. La tensión en la barra 1 se mantiene constante en su valor nominal y los datos en % están dados considerando $S_B=100$ MVA.

3.2. En el sistema de la Figura 3.14 y empleando el método de Gauss-Seidel- Y_B , determinar:

- La tensión en la barra 3 considerando que $|V_3^{k+1} - V_3^k| \leq 0,01$
- Las potencias activa y reactiva suministradas por el Generador G y las pérdidas de potencia activa y reactiva del sistema.

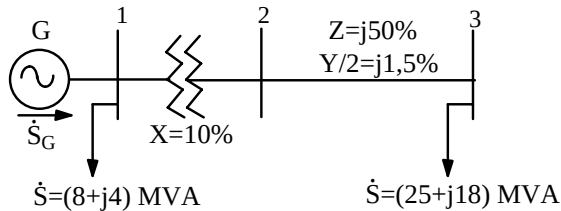


Figura 3.13

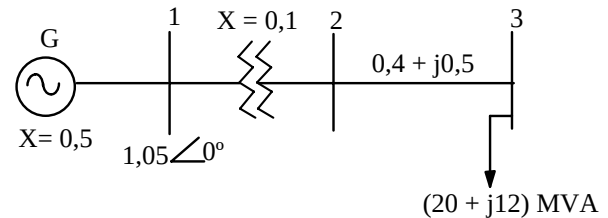


Figura 3.14

3.3. Para el sistema de la Figura 3.15, los datos en pu, base común, se dan en las Tablas N° 1 y N° 2.

- Determinar el voltaje en todas las barras, haciendo dos iteraciones con el método de Gauss-Seidel Y_B y con los valores obtenidos, determinar los flujos de potencia en todas las líneas.
- Determinar los elementos del Jacobiano desacoplado rápido del sistema.
- Correr un flujo DC y determinar los ángulos de los voltajes, los flujos de potencia activa en las líneas y la potencia activa entregada por el generador G_3

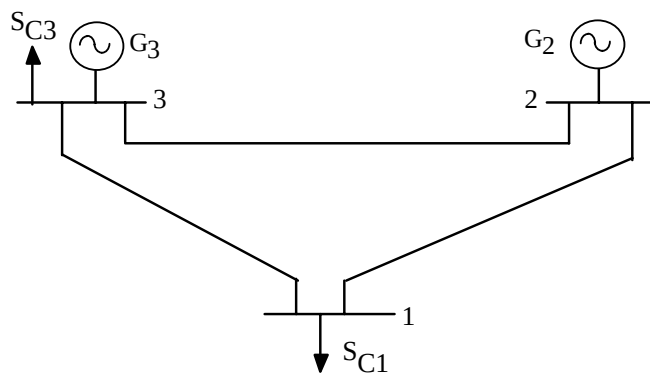


Figura 3.15

Tabla N° 1: Datos de las líneas

Línea	Z (pu)	Y'/2 (pu)
1-2	0,04+j0,10	j0,06
1-3	0,02+j0,08	j0,07
2-3	0,06+j0,20	j0,04

Tabla N° 2: Datos de las barras

Barra N°	Tipo	V (pu)	P _G	Q _G	P _C	Q _C
1	PQ	-	-	-	0,8	0,2
2	PQ	-	0,2	0,1	0,0	0,0
3	SL	1,06	-	-	0,4	0,1

3.4. La Figura 3.16 muestra un sistema de tres barras. La barra 1 es la barra slack y su voltaje es 1,05 (pu), la barra 3 es de tensión controlada (BTC) y el módulo del voltaje en ella está especificado en 1,05 (pu). La potencia reactiva del condensador síncrono puede variar entre 0 y 0,6 (pu). Determinar:

- Las tensiones en las barras, haciendo dos iteraciones del método de Gauss-Seidel- Y_B
- Los flujos de potencia activa y reactiva en las líneas
- Las pérdidas de potencia activa y reactiva
- La potencia compleja entregada por el generador G_1
- La potencia reactiva suministrada por el condensador de la barra 3.

3.5. En el sistema de la Figura 3.16, suponga que los valores de las tensiones en una iteración cualquiera son: $\dot{V}_1 = 1,05 \angle 0^\circ$; $\dot{V}_2 = 1,04 \angle -2,5^\circ$; $\dot{V}_3 = 1,05 \angle -1,5^\circ$. Determinar:

- El Jacobiano completo en esa iteración
- El Jacobiano desacoplado
- La matrices $[B']$ y $[B'']$

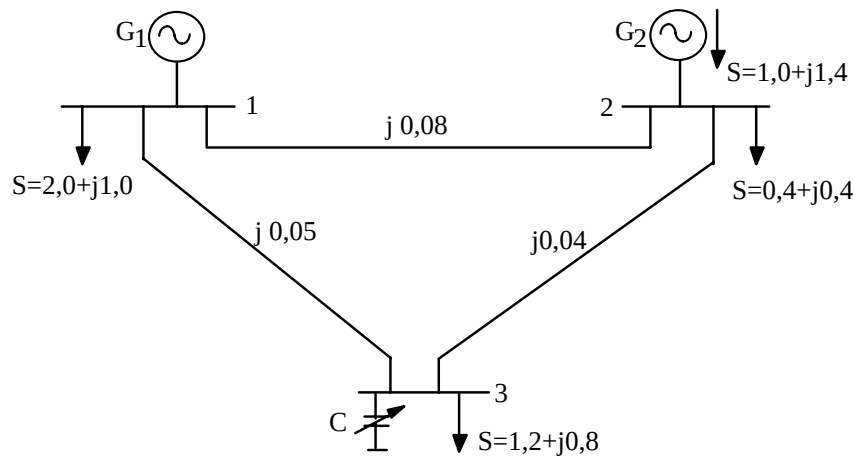


Figura 3.16

3.6. En el sistema de dos barras de la Figura 3.17, los datos en pu están en base 100 MVA, la barra 1 es la barra slack y su voltaje es 1,04 (pu). En la barra 2, hay un compensador síncrono (CS) que mantiene constante el módulo del voltaje en 1,05 (pu).

- Determinar el voltaje en la barra 2 haciendo dos iteraciones del método de Gauss-Seidel- Y_B y con los valores anteriores, calcular la potencia reactiva que debe entregar (recibir) el compensador síncrono y las potencias activa y reactiva que debe entregar (recibir) el generador.
- Determinar los elementos de la matriz Jacobiana completa, considerando que los voltajes en la barra 1 y 2 son de $1,04 \angle 0^\circ$ y $1,05 \angle -4,5^\circ$ respectivamente.

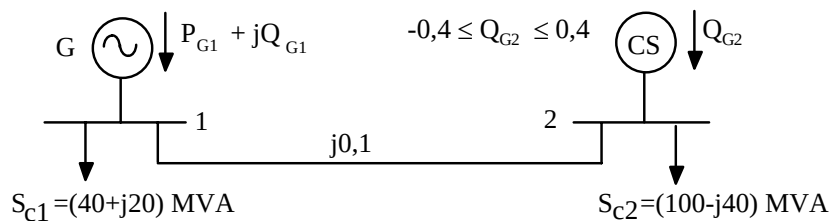


Figura 3.17

3.7. En el sistema de la Figura 3.18, la barra 3 es BTC con una tensión de 1 (pu). Empleando el método de Gauss-Seidel- Y_B , determine:

- La tensión en la barra 3, considerando que $|\theta_3^{k+1} - \theta_3^k| \leq 0,5$
- Las potencias activa y reactiva suministradas por el Generador G y las pérdidas de potencia activa y reactiva del sistema.
- La potencia reactiva que debe entregar el condensador ubicado en la barra 3. Los datos están en pu base 100 MVA.

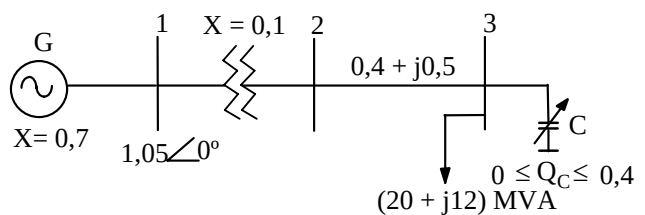


Figura 3.18